

2026. 3(15). 24-43
ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫЕ КОНСТРУКЦИИ
REINFORCED CONCRETE STRUCTURES (ZHELEZOBETONNYYE KONSTRUKTSII)
ISSN 2949-1622 (PRINT)
ISSN 2949-1614 (ONLINE)
HTTPS://G-B-K.RU

УДК 69.04
DOI: 10.22227/2949-1622.2024.4.33-43

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ/ RESEARCH ARTICLE

Численное моделирование фрагментов плитных железобетонных конструкций в нелинейной постановке

Д.А. Пекин*

ООО «ИНВ-Строй», г. Подольск, Московская область, Российская федерация

* dpekin@mail.ru

Ключевые слова: численное моделирование, теории прочности бетона, железобетонные плиты, критерий разрушения, нелинейный анализ

История статьи
Поступила в редакцию: 24.06.2026
Доработана: 09.07.2026
Принята к публикации: 12.07.2026

Для цитирования
Пекин Д.А. Численное моделирование фрагментов плитных железобетонных конструкций в нелинейной постановке // Железобетонные конструкции. 2026. Т. 15. № 3. С. 24-43.

Аннотация. Выполнен краткий обзор зарубежных и отечественных теорий или критериев прочности бетона, современных авторских и «тяжелых» программно-вычислительных комплексов (ПВК) для решения задач железобетона в объемной нелинейной постановке. Перечислены критерии прочности бетона, которые в них используются. Подробно рассмотрена теория пластического течения бетона Menetrey-Willam с учетом возможности нелинейного упрочнения при сжатии, линейного и нелинейного разупрочнения при растяжении и дилатации (УРД).
Проведено численное моделирование трех разных фрагментов плитных железобетонных конструкций с помощью метода конечных элементов (МКЭ) в ПВК ANSYS 2024 R2 с варьированием: размеров КЭ, критериев прочности, способа армирования и параметров УРД, площади арматуры. Подробно описаны результаты расчетов плит с указанием количественных и качественных характеристик расчетных моделей. Предлагаются пути совершенствования МКЭ для расчета плитных ЖБК.

Numerical Modeling of Reinforced Concrete Slab Fragments in a Nonlinear Formulation

D.A. Pekin*

"INV-Stroy" LLC, Podolsk, Moscow region, Russian Federation

* dpekin@mail.ru

Keywords: numerical modeling, concrete strength theory, reinforced concrete slabs, failure criterion, nonlinear analysis

Article history
Received: 24.06.2026
Revised: 09.07.2026
Accepted: 12.07.2026

Abstract. A brief review of foreign and domestic theories or criteria for concrete strength, modern proprietary and "heavy" software and computing systems for solving reinforced concrete problems in a 3D solid nonlinear formulation is provided. The concrete strength criteria used in these systems are listed.
The Menetrey-Willam plastic flow theory of concrete is examined in detail, taking into account the possibility of nonlinear hardening under compression and linear and nonlinear softening under tension and dilation (HSD).

Дмитрий Анатольевич Пекин, кандидат технических наук, главный конструктор, ООО «ИНВ-Строй», 142105, Московская область, г. Подольск, ул. Пионерская, д.6-30; eLIBRARY SPIN-код: 9448-4562, Scopus: 57209306984, ORCID: 0000-0002-6701-2511, E-mail: dpekin@mail.ru.

© Пекин Д.А., 2026
This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
https://creativecommons.org/licenses/by/4.0/

Dmitrii A. Pekin, Candidate of Technical Sciences, Chief Structural Engineer, "INV-Stroy" LLC, Pionerskaya st., 6-30, Podolsk, 142105, Russian Federation, eLIBRARY SPIN-код: 9448-4562, Scopus: 57209306984, ORCID: 0000-0002-6701-2511, E-mail: dpekin@mail.ru.

For citation
Pekin D.A. Numerical Modeling of Reinforced Concrete Slab Fragments in a Nonlinear Formulation. *Reinforced concrete structures.* 2026; 3(15):24–43.

Numerical modeling of three different fragments of slab reinforced concrete structures was carried out using the finite element method (FEM) in the ANSYS 2024 R2 software package with variations in the following: FE dimensions, strength criteria, reinforcement method and HSD parameters, and reinforcement area. The results of slab calculations are described in detail, with quantitative and qualitative characteristics of the calculation models indicated. Ways to improve the FEM for calculating slab reinforced concrete structures are proposed.

ВВЕДЕНИЕ

Развитие численных методов и теорий прочности бетона для решения нелинейных задач железобетона не останавливается на протяжении последних нескольких десятилетий с учетом бурного развития компьютерной техники. К сожалению, разрыв по времени между теоретическими разработками и исследованиями в области железобетона и их последующей реализацией в коммерческих программно-вычислительных комплексах (ПВК) также значителен, кроме того, только лишь небольшая часть наработок и предложений в конечном итоге становится доступной для широкого круга пользователей. Например, деформационная теория пластичности бетона и железобетона Гениева Г.А., развитая вместе с соавторами в работе [1], была реализована в одном распространенном в России ПВК, использующем метод конечных элементов (МКЭ), спустя более, чем 30 лет и только применительно к стержневым и оболочечным КЭ и после преобразования в теорию пластического течения. Теория прочности бетона и железобетона проф. Карпенко Н.И. [2, 3] была реализована для аналогичных КЭ в другом известном ПВК и некоторых авторских программах для выполнения отдельных расчетов железобетонных конструкций (ЖБК), недоступных большинству исследователей. Множество других отечественных теорий прочности для материалов, имеющих различное сопротивление сжатию и растяжению, рассмотренных в работе [4], так и не были реализованы на программном уровне. Аналогичная ситуация сохраняется в нашей стране до сих пор – во всех известных и доступных ПВК отсутствует возможность решать нелинейные задачи по определению напряженно-деформированного состояния (НДС) в объемной постановке, которая характерна большинству статически неопределимых ЖБК, даже при рассмотрении фрагментов конструкций или отдельных конструктивных элементов. Исключением являются отдельные программы, например, УДАР (владелец АО «Атомэнергопроект», разработчик Голяков В.И.), ПРИНС (разработчик Агапов В.П.) и др., используемые авторами для решения узкого круга задач железобетона и также недоступные профильным специалистам. Тем не менее, работы в области развития и совершенствования теорий прочности бетона продолжаются в нашей стране и сейчас, можно отметить результаты групп авторов [5-7] и [8-10].

За рубежом, большей частью в США разработано несколько «тяжелых» ПВК на основе МКЭ, таких как ANSYS, ABAQUS, NASTRAN, LS-DYNA, позволяющих решать всевозможные задачи как механики, так и физики в статической или динамической постановке, и пользующихся спросом по всему миру среди производителей различной техники и товаров широкого потребления. Понятно, что строительное направление и такие материалы как бетон занимают небольшую нишу от возможностей подобных ПВК и, скорее всего, для разработчиков не являются приоритетными. В этой связи, некоторые из них (ANSYS) предусмотрели возможность добавления пользовательских КЭ в свои библиотеки, тем самым открывая возможность другим разработчикам и исследователям пространство для решения своих задач и развития новых направлений, что и было проделано в [8].

В статье [9] авторы провели анализ некоторых теорий прочности бетона и их модификаций, в том числе собственной, часть из которых реализована в перечисленных выше ПВК, и может быть дополнена другими критериями прочности, имеющими непрерывную замкнутую поверхность, предложенными следующими зарубежными исследователями DiMaggio-Sandler (1971),

Sandler-Rubin (1979), Rubin (1991), Schwer-Murray (2002) и перечисленными в [11]. В указанных зарубежных ПВК реализованы лишь некоторые критерии прочности бетона следующих авторов Drucker-Prager, Willam-Warnke, Menetrey-Willam, Lee-Fenves, Schwer-Murray и выбор разработчиков заметно отличается за исключением ставших классическими теорий Друкера-Прагера и Кулона-Мора, применяющихся для множества других материалов и грунтов. Выбор ПВК ANSYS для численного исследования был также связан с возможностью параметризации расчетных моделей плитных ЖБК с помощью встроенного языка APDL, который позволяет существенно сократить время и трудозатраты на процедуру повторного создания схожих образцов и их калибровки на основе физических экспериментов.

Цель работы – качественно и количественно оценить возможности современных и доступных пользователям численных методов и теорий прочности бетона для моделирования плитных ЖБК на примере ПВК ANSYS 2024 R2.

Интересно проследить развитие данного ПВК за последние несколько лет и отметить существенные изменения применительно к расчету ЖБК:

1. Перенесен в архив объемный 8-ми узловой КЭ – SOLID65 (при выполнении нелинейного расчета в указанной версии и работавшего ранее в 14-й и 19-й версиях ПВК, возникает ошибка) на основе критерия прочности бетона Willam-Warnke [12], подробно рассмотренного авторами статьи [9] в исходном виде и после реализации в ПВК. Кроме того, этот КЭ поддерживал возможность условного отображения появления трещин и раздробления при сжатии и исключения из расчетной модели после разрушения;

2. Для задач механики деформируемого твердого тела (МДТТ) используются универсальные объемные 8-ми узловые КЭ – SOLID185, 20-ти узловые КЭ (с промежуточными узлами на гранях для повышенной точности) – SOLID186, которые при необходимости могут быть преобразованы в тетраэдр, пирамиду или призму, и 10-ти узловые КЭ в форме тетраэдра (с промежуточными узлами на гранях), поддерживающие, в том числе, критерии Drucker-Prager Concrete и Menetrey-Willam [13], пришедшие на смену критерию Willam-Warnke [12], также рассмотренные в [9];

3. Для объемных КЭ, моделирующих бетон (опция CONCR) и указанных в п. 2 выше, исключена возможность задания традиционных билинейных и многоступенчатых диаграмм одноосного напряженного состояния «σ-ε», ранее задаваемых и связываемых в КЭ SOLID65 через эквивалентные напряжения, вычисляемые на основе энергетической теории прочности. Вместо этого реализован более совершенный и универсальный механизм упрочнения-разупрочнения-дилатации (далее УРД – на языке оригинала HSD) материалов при сжатии и растяжении, который имеет множество вариантов настроек и подбирается по результатам физических экспериментов.

Кроме того, следует отдельно подчеркнуть результаты работы Ph. Menetrey [14], которая внесла заметный вклад в обобщение инструментов численного моделирования механизма разрушения плитных ЖБК при продавливании и содержит подробное описание классических критериев прочности бетона и других параметров, используемых в ПВК.

Объектами исследования в данной статье станут фрагменты плит перекрытий, опертые:

1. Шарнирно по контуру из примера, рассмотренного в Главе 49 документации к ПВК (Ansys Documentation \ Mechanical APDL \ Technology Showcase: Example Problems \ Chapter 49: Load-Limit Analysis … – далее Справка) – расчетная модель 1 (РМ1);

2. Свободно по контуру на основе физических экспериментов, приведенных в статье [15] – расчетная модель 2 (РМ2);

3. На регулярную сетку колонн с шагом 9×9 м в дополнение к п. 2 выше и соответствующие центральной ячейке многопролетной неразрезной плиты перекрытия – расчетная модель 3 (РМ3).

Варьируемые параметры в расчетных моделях фрагментов плит:

1. Тип расчета: линейный (теория упругости) и нелинейный (теории пластического течения);

2. Теории прочности бетона: Drucker-Prager Concrete (DP) и Menetrey-Willam (MW) с различными параметрами УРД (HSD) и без них в РМ1…РМ3;

3. Размер объемных КЭ (SOLID185), моделирующих бетон, в РМ2;
4. Приращение или шаг нагрузки (2,5 и 1 кПа для РМ1, РМ3; 200 и 100 кН для РМ2);
5. Диаметр продольной рабочей арматуры в РМ2, РМ3 (Ø12, 16, 20 мм);
6. Тип КЭ, моделирующих арматуру: BEAM188 (стержни) и REINF265 (специальные КЭ на основе условных пластинчатых КЭ MESH200, задаваемые в дополнение к объемным КЭ бетона SOLID185 и не имеющие общих узлов), в РМ2.

Особенности реализации и моделирования фрагментов плит в РМ1…РМ3:
- трещины представляются на основе модели условных трещин в соответствии с фундаментальной концепцией механики разрушения, предложенной D. Broek в 1974 и развитой группой авторов в [16] для железобетона с использованием схемы I образования трещин (mode I), характеризуемой таким интегральным параметром, как энергия разрушения – G_f [14, стр. 52, 53];
- с помощью специальных КЭ REINF265 армирование создается посредством условных пластинчатых КЭ MESH200, в которых арматура «размазывается» в требуемом направлении с заданными шагом и площадью с привязкой на соответствующем расстоянии к выбранным объемным КЭ SOLID185, моделирующим бетон, т. о. для каждой арматурной сетки создается два слоя армирования, привязываемых к одному слою бетона;
- для всех моделей выбраны объемные КЭ SOLID185 для бетона, более точные КЭ SOLID186 не используются по следующим причинам:
  1) увеличивается размерность и продолжительность решения задачи за счет дополнительных промежуточных узлов на гранях КЭ;
  2) при моделировании арматуры с помощью КЭ REINF265 дополнительные промежуточные точки на гранях объемных КЭ SOLID185 в местах пересечений с пластинами добавляются автоматически;
  3) в данной версии ПВК при комбинации КЭ SOLID186 и REINF265 в последних не отображаются цвета на изополях напряжений, деформаций и перемещений, несмотря на наличие корректной цвето-цифровой шкалы (т. е. результаты в КЭ REINF265 отображаются только серым цветом вместо соответствующей цветовой гаммы),
- задание армирования посредством стержневых КЭ BEAM188 в узлах объемных КЭ или на их основе дискретного армирования REINF264 без привязки к узлам объемных КЭ даже с учетом применения языка APDL достаточно трудоемко и требует предварительного создания линейных (стержневых) элементов в препроцессоре, которым далее назначаются характеристики, соответствующие арматуре;
- в данном случае для моделирования плит во всех РМ с учетом симметрии достаточно рассмотреть только четверть конструкции, предусмотрев на отсекаемых вертикальных гранях соответствующие линейные связи вдоль осей X и Y, остальные граничные условия:
  1) свободное опирание фрагмента плиты на опорный контур в РМ2 задается контактной парой из КЭ TARGE170 и CONTA174 с коэффициентом трения – 0,3;
  2) шарнирное опирание плиты по контуру в РМ1 реализовано с помощью линейных связей по оси Z (в вертикальном направлении);
  3) в РМ3 по нижней и верхней граням колонны предусмотрены жесткая заделка (линейные и угловые связи) и линейные связи вдоль осей X и Y, соответственно;
- для решения системы нелинейных алгебраических уравнений используются:
  1) процедура Ньютона-Рафсона, которая рассмотрена в [14, стр. 67], [17, стр. 64];
  2) решатель PCG (Preconditioned Conjugate Gradient iterative equation solver – Итерационный решатель уравнений с предварительно обусловленным сопряженным градиентом);
  3) стандартные настройки по умолчанию, которые определяются ПВК автоматически в зависимости от типа задачи (нежелательно менять их без крайней необходимости, поскольку от этого существенно зависят результаты вычислений),

- критерием достижения предельного состояния, предшествующего разрушению ЖБК, как предложено разработчиками ПВК, будет служить одновременное нарушение сходимости численного решения и горизонтальная касательная в крайней точке диаграммы «*P-f*» (нагрузка-прогиб).

МЕТОД

Для определения предельной нагрузки на основе теории пластического течения бетона разработчиками ПВК рекомендуется использовать критерии Drucker-Prager Concrete и Menetrey-Willam совместно с механизмом УРД (HSD) и различными вариантами зависимостей разупрочнения бетона – линейной (HSD6) и экспоненциальной (HSD2), необходимыми в первую очередь для моделирования раскрытия трещин [16], а не ниспадающей ветви на диаграмме растяжения «σ-ε», которая от них принципиально отличается. С учетом опубликованных авторами статьи [10] критерия Drucker-Prager Concrete (DP) и линейной зависимости (HSD6) далее приводится программная реализация только критерия Menetrey-Willam (MW) и экспоненциальной зависимости (HSD2), используемые в рассматриваемых РМ.

Параметры упрочнения и разупрочнения (УР-HS) определяются выражениями:

$$R'_{bt} = R_{bt}\Omega_{tc}, \tag{1}$$

$$R'_{bc} = R_{bc}\Omega_{c}, \tag{2}$$

$$R'_{bb} = R_{bb}\Omega_{c}, \tag{3}$$

$$\Omega_{tc} = \begin{cases} \Omega_t, & \kappa_c \le \kappa_{cm} \\ \Omega_t\Omega_c, & \kappa_c > \kappa_{cm} \end{cases}, \tag{4}$$

где R_{bt} и R_{bc}, R_{bb} – сопротивления бетона одноосному растяжению и сжатию, двухосному сжатию соответственно (в данных и последующих обозначениях верхняя черта заменена на штрих и добавлен начальный индекс b – бетон; вторые индексы t – растяжение, c – сжатие, b – двухосное приняты согласно Справки);

Ω_c и Ω_t – функции упрочнения и разупрочнения при сжатии и растяжении, которые зависят от характеристик упрочнения при сжатии и растяжении κ_c и κ_t; κ_{cm} – пластическая деформация, соответствующая пределу прочности при одноосном сжатии.

Поверхность текучести MW в координатах напряжений Хейга-Вестергаарда:

- гидростатическая ось ξ (при $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) проходит через начало (точку 0) ортогональной системы координат с осями в виде главных напряжениях σ_1-σ_2-σ_3 и имеет к ним равный наклон;
- перпендикулярная ей ось (радиус-вектор) ρ вместе с девиаторным полярным углом θ (угол Лоде), регламентирующим поворот оси (радиус-вектора) ρ вокруг оси ξ, определяют расстояние до поверхности текучести и совместно представляют собой цилиндрическую систему координат относительно оси ξ в пространстве главных напряжений,

задается выражением:

$$f_{MW} = \frac{c_2}{c_3}\left[\sqrt{2}\xi + r\rho\right] + \rho^2 - \frac{1}{c_3}, \tag{5}$$

где c_2 и c_3 – функции, зависящие от характеристик бетона, упрочнения и разупрочнения:

$$c_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\left[\frac{1}{R'_{bc}} - \frac{1}{R'_{bb}} + \frac{R'_{bb} - R'_{bt}}{R'^2_{bc}}\right], \tag{6}$$

$$c_3 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{R'^2_{bc}}, \tag{7}$$

r – функция, зависящая от угла Лоде θ и характеристик бетона, упрочнения и разупрочнения:

$$r = \frac{4(1-e^2)\cos^2\theta + (2e-1)^2}{2(1-e^2)\cos\theta + (2e-1)\sqrt{4(1-e^2)\cos^2\theta + 5e^2 - 4e}}, \quad (8)$$

$$e = \frac{1+\epsilon}{2-\epsilon}, \quad (9)$$

$$\epsilon = \frac{R'_{bt}}{R'_{bb}} \cdot \frac{R'^2_{bb} - R'^2_{bc}}{R'^2_{bc} - R'^2_{bt}}. \quad (10)$$

Координаты напряжений Хейга-Вестергаарда задаются выражениями:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1, \quad (11)$$

$$\rho = \sqrt{2J_2}, \quad (12)$$

$$\cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}, \quad (13)$$

где ξ и ρ – инварианты гидростатических и девиаторных напряжений;
I_1 – первый инвариант тензора напряжений:

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad (14)$$

J_2 и J_3 – второй и третий инварианты тензора девиаторных напряжений:

$$J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ji} = \frac{1}{2}(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) =$$
$$= \frac{1}{6}[(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2] + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 =$$
$$= \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{3} I_1^2 - I_2, \quad (15)$$

$$J_3 = \det(\sigma - I\sigma_m) = \det(s_{ij}) = \frac{1}{3} s_{ij} s_{jk} s_{ki} = s_1 s_2 s_3 = \frac{2}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3 =$$
$$= \frac{1}{27}[2(\sigma_1^3 + \sigma_2^3 + \sigma_3^3) - 3(\sigma_1^2\sigma_2 + \sigma_1^2\sigma_3 + \sigma_2^2\sigma_1 + \sigma_2^2\sigma_3 + \sigma_3^2\sigma_1 + \sigma_3^2\sigma_2) + 12\sigma_1\sigma_2\sigma_3], \quad (16)$$

где σ_{11}, σ_{22}, σ_{33} – нормальные напряжения; σ_{12}, σ_{23}, σ_{31} – касательные напряжения;
σ – напряжение; $\sigma_m = (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})/3$ – среднее гидростатическое напряжение;
$I -$ единичный тензор; s_{ij}, s_{jk}, s_{ki} – напряжения девиаторного тензора;
s_1, s_2, s_3 – главные напряжения девиаторного тензора,
I_2 и I_3 – второй и третий инварианты тензора напряжений:

$$I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1, \quad (17)$$

$$I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \quad (18)$$

где σ_1, σ_2, σ_3 – главные напряжения.

Потенциал течения:

$$Q_{MW} = \rho^2 + B_g\rho + C_g\xi, \quad (19)$$

где B_g и C_g – функции, зависящие от характеристик бетона, упрочнения, разупрочнения и угла дилатации ψ:

$$B_g = \frac{2R'_{bc}\,\mathrm{tg}\,\psi - \sqrt{2}R'_{bt}}{\sqrt{3}\left(1-\sqrt{2}\,\mathrm{tg}\,\psi\right)}, \tag{20}$$

$$C_g = \frac{B_g}{\sqrt{2}} + \frac{2R'_{bt}}{\sqrt{3}}, \tag{21}$$

$$\frac{R_{bt}}{\sqrt{2}R_{bc}} < \mathrm{tg}\,\psi \le \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \mathrm{arctg}\frac{R_{bt}}{\sqrt{2}R_{bc}} \cong 4° < \psi \le {\sim}35°. \tag{22}$$

Поведение поверхностей текучести при упрочнении-разупрочнении определяется соответствующими функциями Ω_c и Ω_t, см. рис. 1. Эти функции зависят от переменных упрочнения при сжатии и растяжении, которые определяются следующими выражениями [18]:

$$k'_c = \frac{\alpha_c}{R'_{bc}}\sigma\varepsilon'_{pl}, \tag{23}$$

$$k'_t = \frac{\alpha_t}{R'_{bt}}\sigma\varepsilon'_{pl}, \tag{24}$$

где α_c и α_t – весовые функции сжатия и растяжения, задаваемые следующим образом:

$$\alpha_c = 1 - \alpha_t, \tag{25}$$

$$\alpha_t = \begin{cases} 0, & \mathrm{tg}\,\alpha < -2 \\ \dfrac{1}{1+\exp(-10\,\mathrm{tg}\,\alpha)}, & -2 \le \mathrm{tg}\,\alpha \le 2, \\ 1, & \mathrm{tg}\,\alpha > 2 \end{cases} \tag{26}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \sqrt{6}\frac{\xi}{\rho}, \tag{27}$$

Функция текучести при сжатии Ω_c в интервале $0 < \kappa \le \kappa_{cm}$ задается нелинейной функцией упрочнения с помощью следующего выражения:

$$\Omega_c = \Omega_{ci} + (1-\Omega_{ci})\sqrt{2\frac{\kappa}{\kappa_{cm}} - \frac{\kappa^2}{\kappa_{cm}^2}}, \tag{28}$$

где κ_{cm} – пластическая деформация при одноосном сжатии, после которой начинается разупрочнение;

Ω_{ci} – относительное напряжение (уровень напряжений) в начале нелинейного упрочнения.

Функция текучести при сжатии Ω_c в интервале $\kappa_{cm} < \kappa < \kappa_{cu}$ задается нелинейной функцией разупрочнения с помощью следующего выражения:

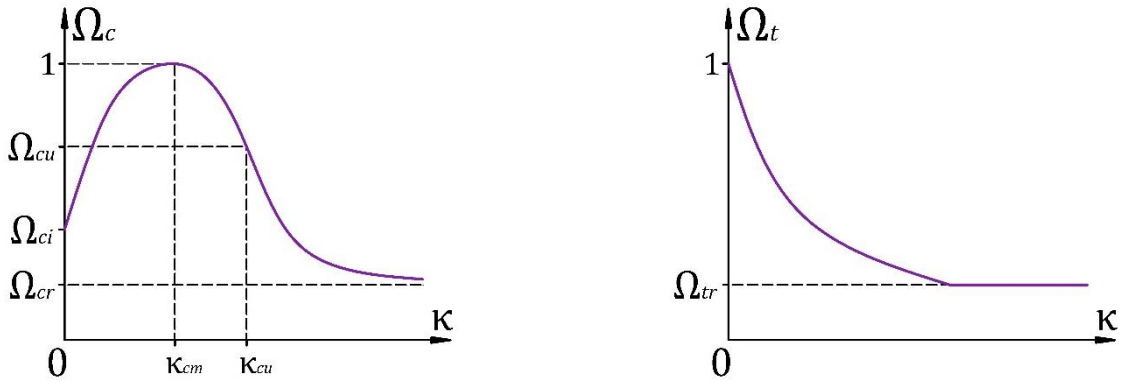
$$\Omega_c = 1 - (1-\Omega_{cu})\left(\frac{\kappa-\kappa_{cm}}{\kappa_{cu}-\kappa_{cm}}\right)^2, \tag{29}$$

и в интервале $\kappa > \kappa_{cu}$:

$$\Omega_c = \Omega_{cr} + (\Omega_{cu}-\Omega_{cr})\exp\left(2\frac{\Omega_{cu}-1}{\kappa_{cu}-\kappa_{cm}}\cdot\frac{\kappa-\kappa_{cu}}{\Omega_{cu}-\Omega_{cr}}\right), \tag{30}$$

где κ_{cu} – пластическая деформация при одноосном сжатии в точке перехода от степенного закона разупрочнения к экспоненциальному;

Ω_{cu} – остаточное относительное напряжение при сжатии в точке диаграммы, соответствующей κ_{cu};
Ω_{cr} – остаточное относительное напряжение при сжатии.



а) – при сжатии
а) – compression
б) – при растяжении
b) – tension

Рис. 1. Экспоненциальное разупрочнение при сжатии и растяжении [Справка, р. 4.11.6, рис. 4.57]
Fig. 1. Exponential softening in compression and tension [Ansys Documentation, ch. 4.11.6, fig. 4.57]

Функция текучести при растяжении Ω_t описывается экспоненциальной функцией разупрочнения, где объемная энергия, рассеиваемая при разупрочнении, пропорциональна удельной энергии разрушения при растяжении G_{ft} (схема I):

$$\Omega_t = \exp\left(-\frac{\kappa}{a_t}\right), \tag{31}$$

где:

$$a_t = \frac{g_{ft}}{R_{bt}}, \tag{32}$$

$$g_{ft} = \max\left(\frac{G_{ft}}{L_i}, \frac{R_{bt}^2}{E_b}\right), \tag{33}$$

где L_i – оптимальная длина элемента (для объемных КЭ L_i равна кубическому корню из объема точки интегрирования и вычисляется автоматически) и E_b – начальный модуль упругости бетона определяют следующее выражение для энергии, рассеиваемой в процессе разупрочнения и задаваемой функцией текучести при растяжении:

$$\int_0^\infty \Omega_t \, d\kappa = \frac{g_{ft}}{R_{bt}}, \tag{34}$$

где Ω_{tr} – остаточное относительное напряжение при растяжении, необходимое для ограничения кривой разупрочнения.

В таблицах 1 и 2 приведены характеристики бетона и арматуры, используемые в РМ, соответственно. Для РМ1 они заимствованы из р. 49.4 Справки, для РМ2 из статьи [15], для РМ3 приняты по аналогии с РМ2.

Для материалов подобных стали в ПВК реализованы несколько различных критериев прочности и законов течения. В нашем случае для арматуры были использованы критерий фон Мизеса (vM) или энергетическая теория прочности с учетом ассоциированного закона течения, которые подробно описаны в разделе 4.4 Справки, и кинематическое упрочнение с двумя вариантами билинейной диаграммы «σ-ε». Один вариант задавался с помощью опции BKIN, регламентирующей

наклон 1-го и 2-го сегментов диаграммы на основе модуля упругости E_s и касательного модуля E_T, соответственно. Другой вариант задан с использованием опции KINH, позволяющей определить многоступенчатую диаграмму по характерным точкам перегиба, но приведенный к билинейной и с добавлением на первом сегменте промежуточной точки, соответствующей упругим напряжениям в арматуре $\sigma_{s1} = 0{,}9R_{sn}$ (или условному пределу пропорциональности) и началу развития пластических деформаций. Наклон второго сегмента указанной диаграммы определяется двумя характерными точками ($\varepsilon_{s0} = R_{sn}/E_s; \sigma_{s0} = R_{sn}$) и ($\varepsilon_{s2} = 0{,}025; \sigma_{s2} = 1{,}01R_{sn}$) и практически соответствует горизонтальной прямой. Отличие двух этих билинейных диаграмм друг от друга связано с более ранним началом учета развития пластических деформаций. При таких значениях характерных точек отсутствует влияние на диаграммы «*P-f*», но результаты в виде графического отображения изополей пластических деформаций получаются более информативными по количеству цветов на стадиях, предшествующих разрушению.

Таблица 1

Характеристики и параметры бетона, используемые в РМ

№ РМ	Класс, R_{bc} R_{bt}, МПа	Размер КЭ, мм X Y Z	γ_b, кг/м^3 E_b, МПа ν_b	Критерий прочности	ψ, ° или δ_t δ_c, д.е.	κ_{cm}, ‰ или $\times10^3$	κ_{cu}, ‰ или $\times10^3$	Ω_{ci}	Ω_{cu}	Ω_{cr}	G_{ft}, Дж/м^2 или Н·м/м^2	Ω_{tr}	κ_{cr}, ‰ или $\times10^3$	κ_{tr}, ‰ или $\times10^3$	КЭ для армирования
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
РМ1-1	С20/25 28,0 2,2	50 50 50	2500 30000 0,2	DP	0,25 1,00	1,33	2,93	0,33	0,85	0,2	100	0,1	-	-	REINF265 MESH200
РМ1-2				MW	20	-	-	-	-	-	-	-			
РМ1-3						1,48	1,62	0,8	0,84	0,2	40	0,01			
РМ2-1		25 25 12,5-25		DP	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	BEAM188
РМ2-2				MW											
РМ2-3					20										
РМ2-4		50 50 12,5-25		DP	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	REINF265 MESH200
РМ2-5				MW											
РМ2-6	В30 17,0 1,15		2500 32500 0,2		20										
РМ2-7		50 50 60		MW	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	REINF265 MESH200
РМ2-8					20	-	-	-	-	-	-	-	-	-	
РМ2-9						1,48	-	0,9	-	0,9	-	0,05	4,8	0,5	
РМ2-10							1,62	0,8	0,84	0,2	40	0,01	-	-	
РМ3-1		100 100 60		DP	0,25 1,00	1,48	1,62	0,8	0,84	0,2	40	0,01	-	-	REINF265 MESH200
РМ3-2				MW	20										
РМ3-3												0,05			

Примечание: γ_b – удельный вес бетона; сопротивление бетона двухосному сжатию для всех РМ согласно [12] принято $R_{bb} = 1{,}2R_{bc}$; ν_b – коэффициент Пуассона; δ_t и δ_c – коэффициенты дилатации бетона при растяжении и сжатии в РМ с DP; κ_{cr} – пластическая деформация при сжатии, соответствующая крайней точке ниспадающего отрезка разупрочнения; κ_{tr} – предельная пластическая деформация при растяжении.

Таблица 2

Характеристики и параметры армирования, используемые в РМ

№ РМ	Класс, R_{sn}, МПа	d_s d_c, мм	Рабочая арматура d_s: Нижняя (a) Верхняя (a) ячейки, мм	Конструктивная арматура d_c: Нижняя (a) Верхняя (a) ячейки, мм	Размер КЭ, мм X×Y	γ_s, кг/м^3 E_s, МПа ν_s	Критерий прочности	Тип упрочнения	E_T, МПа	ε_{s2}, ‰ или $\times10^3$	σ_{s2}, МПа
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
РМ1	А500 500,0	6 -	250×150 (30) -	- -	50×50	7850 200000 0,3	vM	BKIN	1740	-	-
РМ2		12 -	100×100 (25) -	- -	25 или 50×50			KINH	-	25,0	$1{,}01R_{sn}$
РМ3		12 12	100×100 (25) 100×100 (25)	200×200 (25) 200×200 (25)	100×100						

Примечание: R_{sn} – нормативное сопротивление арматуры растяжению; d_s и d_c – диаметр рабочей и конструктивной арматуры; a – расстояние от грани плиты до центра тяжести сечения арматуры ; γ_s – удельный вес арматуры; ν_s – коэффициент Пуассона; E_s – модуль упругости стали; E_T – касательный модуль, характеризующий второй сегмент билинейной диаграммы «σ-ε»; ε_{s2} и σ_{s2} – предельные относительные деформации при одноосном растяжении и соответствующие им напряжения.

На рис. 2, 3 и 4 показаны изометрические виды расчетных моделей РМ1, РМ2 и РМ3. С учетом симметрии и равномерного нагружения моделировались только фрагменты в виде четвертей плитных ЖБК в 1-м квадранте декартовой системы координат (в плоскости XY).

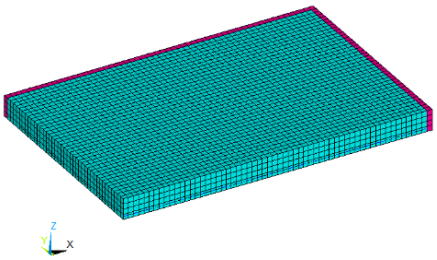


Рис. 2. Расчетная модель РМ1
Fig. 2. Numerical model RM1

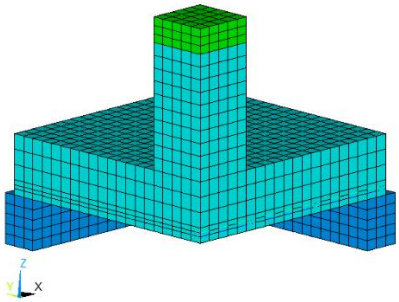


Рис. 3. Расчетная модель РМ2-10
Fig. 3. Numerical model RM2-10

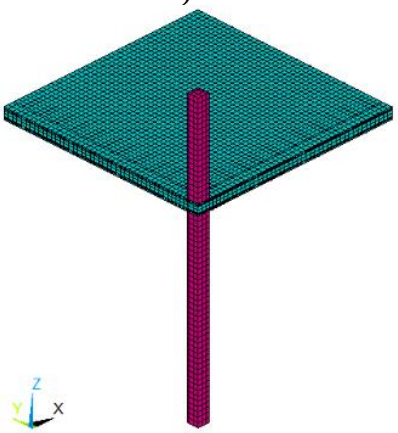


Рис. 4. Расчетная модель РМ3
Fig. 4. Numerical model RM3

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

По результатам проведенных расчетов построены диаграммы «*P-f*» для РМ1…РМ3 и их подвидов с учетом различий в табл. 1, которые показаны на рис. 5…9, при действии кратковременной нагрузки. На рис. 10 и 11 показаны аналогичные диаграммы РМ3 и РМ2 с учетом увеличения диаметра продольной рабочей арматуры до 16 и 20 мм. Для повышения наглядности графиков промежуточные точки между этапами нагружения исключены. Необходимо отметить следующие характерные особенности полученных решений:

1. Текущая реализация в ПВК теорий пластического течения бетона, нелинейного упрочнения при сжатии и различных видов разупрочнения при растяжении позволяет добиться близкого совпадения между численными и экспериментальными диаграммами «*P-f*» при кратковременном нагружении, но только для РМ2 и РМ3, в которых происходит разрушение плитных ЖБК от продавливания.

В некоторых источниках такие диаграммы называются кривыми равновесного состояния, но применительно к железобетону это не совсем верно, поскольку не учитывается ползучесть бетона, уменьшение высоты сжатой зоны в поперечных сечениях с трещинами и последующий рост напряжений, проявляющиеся во времени, как показано на рис. 5 в [19].

2. В РМ1 предельная вертикальная равномерно распределенная нагрузка, полученная разработчиками ПВК для критериев: DP – 25,4 кПа (суммарное усилие 610 кН на графике в Справке) и MW – 27,3 кПа (655 кН) с учетом собственного веса (СВ) плиты, шарнирно опертой по контуру, при нормативных характеристиках материалов и нагрузки от СВ (см. красную штриховую линию на рис. 5) существенно завышена по сравнению с результатами:

- расчета методом предельного равновесия проф. Гвоздева А.А. [20] – 11,9 кПа;
- на основе теории расчета проф. Карпенко Н.И. [2], реализованной в фор. (8.100-8.103) СП 63.13330.2018, – 10,2 кПа,

но полученных с учетом расчетных характеристик материалов (см. красную сплошную линию на рис. 5). Более того, при дальнейшем увеличении нагрузки до 45,0 кПа и выше плита продолжала работать и прогибы достигали 31,5 и 24,3 мм, соответственно, см. кривые на рис. 5.

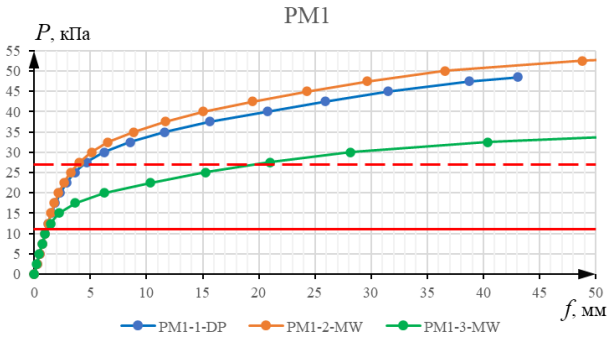


Рис. 5. Диаграмма «*P-f*» РМ1
Fig. 5. «*P-f*» diagram of RM1

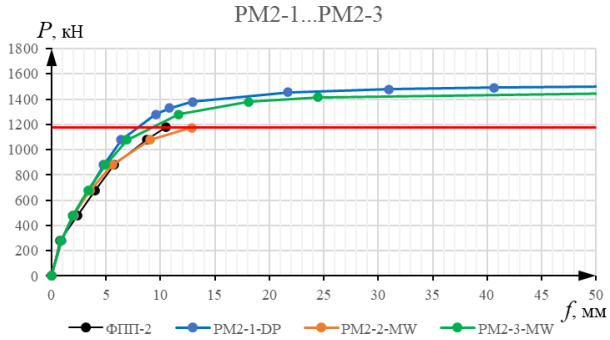


Рис. 6. Диаграмма «*P-f*» РМ2-1… РМ2-3
Fig. 6. «*P-f*» diagram of RM2-1…RM2-3

3. Растягивающие напряжения σ_s в нижней арматуре PM1-1-DP и PM1-2-MW (как на рис. 49.11 и 49.12 Справки по оси X в направлении большего пролета – 24,5 и 24,4 МПа, так и в воссозданных самостоятельно моделях РМ1 при аналогичной внешней нагрузке 27,5 кПа – 15,0 и 17,3 МПа) получены существенно меньшими по сравнению с заданным пределом текучести стали 500 МПа, при этом растягивающие напряжения в бетоне по нижней грани ~1,7 МПа практически соответствуют заданному сопротивлению бетона растяжению 2,2 МПа. Схожая картина растягивающий напряжений в арматуре и бетоне пролетной части плиты получена в РМ3.

4. При сравнении результатов расчета PM1-1-DP и PM1-2-MW с данными приведенными в Справке ПВК следует дополнительно отметить:

- предложенный критерий определения предельной нагрузки для шарнирно опертой по контуру плиты не работает, т. е. при дальнейшем увеличении нагрузки итерационный процесс продолжается вне зависимости от выбранной теории прочности бетона;
- использование нормативных прочностных характеристик бетона класса С20/25 согласно табл. 3.1 Еврокод 2 против расчетных характеристик сопоставимого бетона класса В30 согласно табл. 6.8 СП 63.13330, принятых в РМ1-3, приводит к существенным увеличению предельной нагрузки и уменьшению прогибов, см. кривые на рис. 5;
- результаты расчета не должны отличаться столь значительно, несмотря на следующие отличия в моделировании РМ1: размер КЭ в плоскости плиты 50×50 мм вместо 50×75 мм; при задании арматурных слоев с помощью КЭ REINF265 и MESH200 использовалась

прямоугольная сетка вместо треугольной; нагрузка от собственного веса задавалась в виде давления на верхнюю грань плиты по аналогии с временной нагрузкой;

- при введении и подборе дополнительных параметров упрочнения, разупрочнения и дилатации отличия между различными критериями прочности бетона на результаты расчета и картину НДС практически исчезают.

5. Сравнение результатов РМ2-1…РМ2-3 и РМ2-4…РМ2-6 показывает, что увеличение размера КЭ в плане и изменения типа КЭ или способа моделирования арматуры, незначительно увеличивает предельную нагрузку, см. кривые на рис. 6 и 7 соответственно, но при увеличении толщины КЭ с 12,5-25 до 60 мм в РМ2-7…РМ2-10 и использования параметров УРД (HSD) можно получить сопоставимые результаты, см. рис. 8, т. о. дробить РМ на более мелкие КЭ в плане и по толщине нецелесообразно, в связи с увеличением требуемых объема оперативной памяти, места на жестком диске и времени расчета.

6. Дилатация (явление увеличения объема материала в процессе нагружения) бетона в РМ задается различными способами в зависимости от используемой теории прочности: для критерия DP с помощью коэффициентов дилатации δ_t и δ_c; для критерия MW используется угол дилатации ψ, изменение которого в данном случае почти не оказывает влияния на результат. Например, в РМ2-3 при изменении только угла дилатации ψ на ±10° до значений 10° или 30° результаты на диаграмме «*P-f*» практически не изменились (на рис. эти кривые не показаны).

При сравнении РМ2-2 и РМ2-3, отличающихся учетом дилатации при угле 20°, предельная нагрузка в последней выросла более, чем на 20%, а деформативность увеличилась кратно, см. рис. 6, т. о. учет дилатации в отдельности от УР (HS) существенно искажает картину НДС.

В РМ3-2 (центральный фрагмент плиты перекрытия) при выключении модели УРД (HSD) предельная нагрузка увеличилась с ~15 кПа до 20 кПа. При выключении только параметров УР (HS) и принятом угле дилатации 20°, предельная нагрузка выросла с 15,0 (1215 кН по аналогии с РМ2) до 32,5 (2632,5 кН по аналогии с РМ2) кПа (на рис. эти кривые не показаны). При выключении дилатации и сохранении параметров УР (HS) результат по нагрузке сопоставим с кривой для РМ3-2 на рис. 9, 10, но при этом прогибы увеличились до 40 мм (на ~33%).

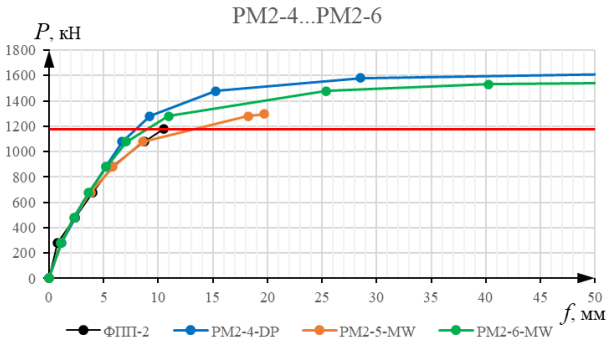


Рис. 7. Диаграмма «*P-f*» РМ2-4… РМ2-6
Fig. 7. «*P-f*» diagram of RM2-4…RM2-6

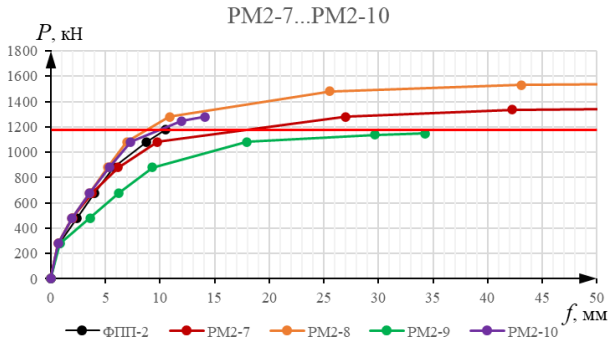


Рис. 8. Диаграмма «*P-f*» РМ2-7… РМ2-10
Fig. 8. «*P-f*» diagram of RM2-7…RM2-10

7. При сравнении кривых РМ2-9 и РМ2-10 на рис. 8, отличающихся способом учета разупрочнения бетона – линейная (HSD6) и экспоненциальная (HSD2, рис. 1 б) зависимости, видно, что параметры HSD6 существенно завышают деформативность фрагмента плиты при заданных значениях. Снижение в РМ2-9 параметра κ_{tr}, приведенного в табл. 1, в два раза с 0,0005 до 0,00025 приводит к увеличению прогибов с ~34 до 40 мм (видимо за счет большего общего количества итераций) и снижению предельной нагрузки до 1080 кН, в связи с чем, можно сделать вывод, что линейная зависимость менее пригодна для моделирования плит.

8. При увеличении в 5 раз с 0,01 до 0,05 остаточного относительного напряжения при растяжении Ω_{tr} в РМ3-3 по сравнению с РМ3-2 результаты на диаграмме «*P*-*f*» изменились так несущественно, что соответствующие кривые на рис. 9 наложились друг на друга. При повторном увеличении Ω_{tr} в 5 раз с 0,05 до 0,25 результаты также практически не изменились (на рис. эти кривые не показаны).

9. При увеличении диаметра рабочей арматуры до 16 и 20 мм в РМ2-10-1 и РМ2-10-2, соответственно, по сравнению с РМ2-10 предельная нагрузка *P* заметно увеличилась с 1280 до 1587 (24%) и 1761 (38%) кН, см. рис. 11.

При увеличении диаметра рабочей арматуры на опоре и в пролете до 16 и 20 мм в РМ3-2-1 и РМ3-2-2, соответственно, по сравнению с РМ3-2 предельная нагрузка *P* увеличилась с 15,2 до значений 16,9 (11,2%) и 17,5 (15,1%) кПа (1369 и 1418 кН по аналогии с РМ2), соответствующих горизонтальным участкам кривых, см. рис. 10. Из этого следует, что дальнейшее увеличение площади арматуры в опорной зоне реальной плитной конструкции, а не в «вырезанном» для проведения натурных испытаний фрагменте с габаритами 2×2 м, почти не приводит к увеличению несущей способности на продавливание, поскольку могут уменьшиться пролет среза и увеличиться угол наклона граней пирамиды, как в данном случае с 20° [15, рис. 5] до возможных ~ 45°.

На рис. 10 в РМ3-2-1 и РМ3-2-2 после прохождения горизонтальных участков кривых дальнейший рост нагрузки соответствует возникновению «пластического» сдвига в опорной зоне вокруг колонны и был получен единожды в каждой из этих РМ, при повторении расчетов без изменения каких-либо параметров рост нагрузки после горизонтальных участков больше не воспроизводился. Необходимо отметить, что для большинства рассмотренных в табл. 1 РМ при одинаковых параметрах фиксировались некоторые отличия в количестве итераций и промежуточных шагов на различных этапах нагружения, характерных развитию пластических деформаций – сложилось впечатление, что процедура Ньютона-Рафсона также зависит от аппаратных возможностей компьютера, меняющихся во времени (объем свободной оперативной памяти; загрузка процессора; …).

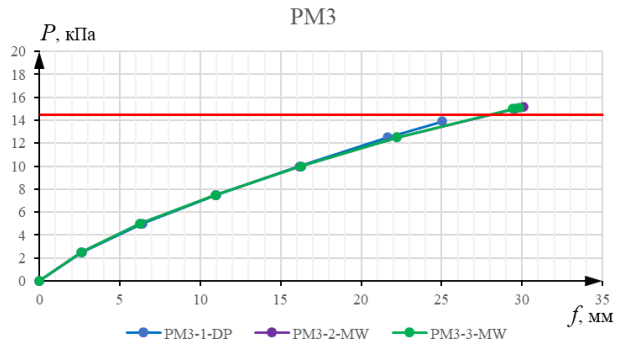


Рис. 9. Диаграмма «*P*-*f*» РМ3
Fig. 9. «*P*-*f*» diagram of RM3

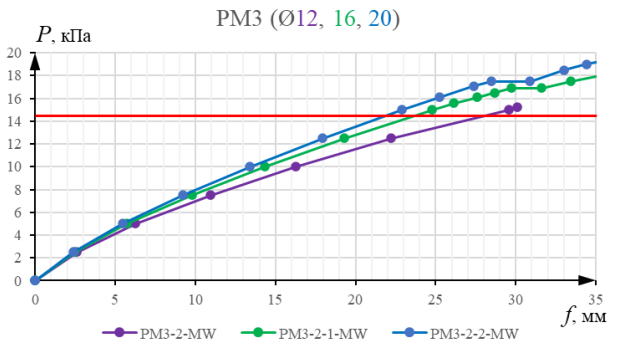


Рис. 10. Диаграмма «*P*-*f*» РМ3 при увеличении диаметра арматуры
Fig. 10. «*P*-*f*» diagram of RM3 with increasing reinforcement diameter

Обозначения к рисункам 5-11 – красные горизонтальные линии:
- Рис. 5 (РМ1). Сплошная – предельная нагрузка по теориям расчета Гвоздева или Карпенко, см. п. 2 «Результаты …». Штриховая – предельная нагрузка, указанная в Справке ПВК;
- Рис. 5-8, 11 (РМ2). Предельная нагрузка по результатам натурного эксперимента для опорной зоны плиты в [15];
- Рис. 9, 10 (РМ3). Предполагаемая предельная нагрузка по аналогии с [15], но для центрального фрагмента плиты без поперечной арматуры.

На рис. 10 и 11 кривые зеленого и синего цветов соответствуют РМ, в которых диаметр рабочей арматуры увеличен до 16 и 20 мм соответственно, см. п. 9 «Результаты …».

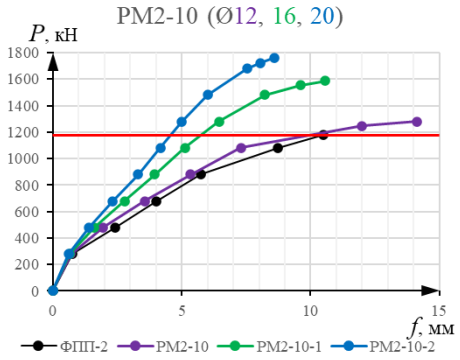


Рис. 11. Диаграмма «*P-f*» PM2 при увеличении диаметра арматуры
Fig. 11. «*P-f*» diagram of RM2 with increasing reinforcement diameter

На рис. 12, 13 и 14, 15 приведены изополя напряжений σ_s (кПа) в арматурных слоях PM1-2 по осям X и Y, соответственно, при равномерно распределенной нагрузке 27,5 кПа (суммарное усилие 660 кН), практически соответствующей предельной нагрузке в Справке ПВК, и 57,7 кПа (суммарное усилие 1385 кН), соответствующей завершению итерационного процесса. В Справке ПВК на рис. 49.11 и 49.12 приведены напряжения σ_s только в направлении нехарактерного большего пролета (по X) и для двух критериев прочности бетона DP и MW – 24,5 и 24,4 МПа при суммарном внешнем усилии (нагрузке) – 610 (25,4 кПа) и 655 (27,3 кПа) кН.

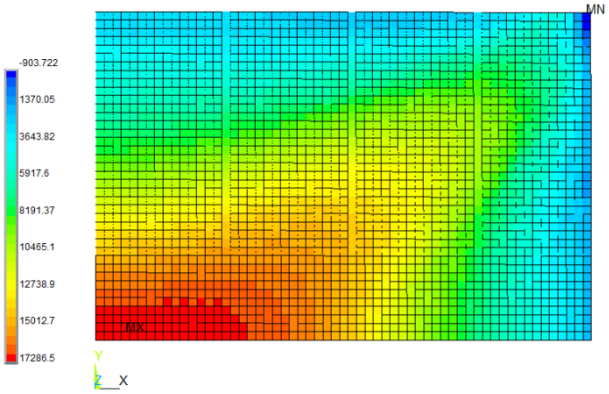


Рис. 12. Напряжения σ_s в PM1-2 по X при 27,5 кПа
Fig. 12. Stresses σ_s in RM1-2 along X at 27.5 kPa

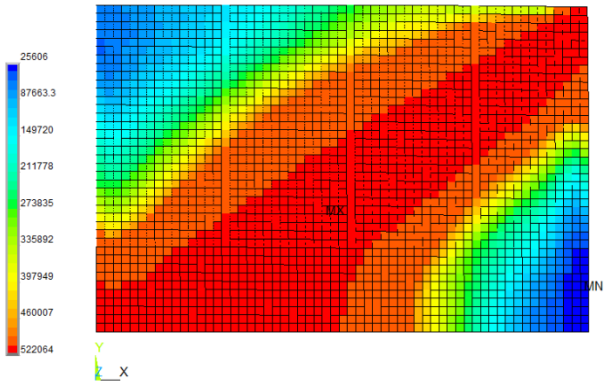


Рис. 13. Напряжения σ_s в PM1-2 по X при 57,7 кПа
Fig. 13. Stresses σ_s in RM1-2 along X at 57.7 kPa

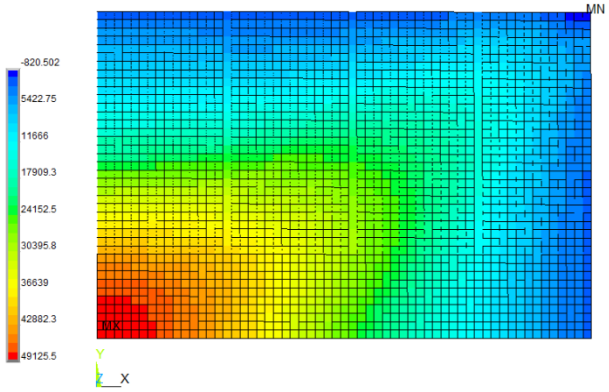


Рис. 14. Напряжения σ_s в PM1-2 по Y при 27,5 кПа
Fig. 14. Stresses σ_s in RM1-2 along Y at 27.5 kPa

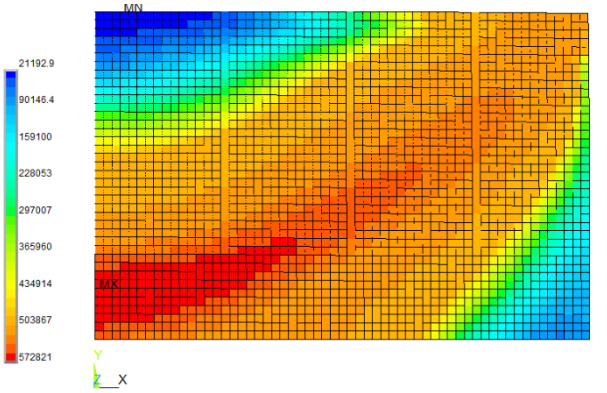


Рис. 15. Напряжения σ_s в PM1-2 по Y при 57,7 кПа
Fig. 15. Stresses σ_s in RM1-2 along Y at 57.7 kPa

На рис. 16…19 приведены изополя прогибов f (м), напряжений σ_s (кПа) и относительных деформаций $\varepsilon_{s,pl}$ (пластические) и $\varepsilon_{s,tl}$ (суммарные) в арматурном слое PM2-10 по оси X при

сосредоточенной внешней нагрузке 1280 кН (распределенная для РМ3-2 – 15,8 кПа), соответствующих завершению итерационного процесса.

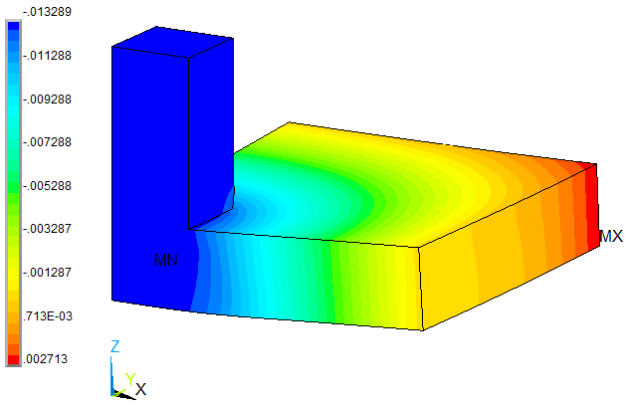


Рис. 16. Прогибы f в РМ2-10 по Z при 1280 кН
Fig. 16. Deflections f in RM2-10 along Z at 1280 kN

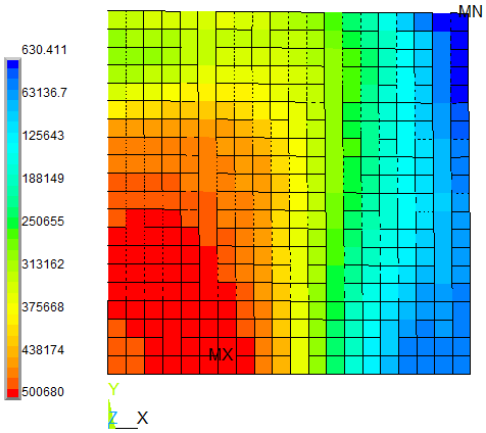


Рис. 17. Напряжения σ_s в РМ2-10 по X при 1280 кН
Fig. 17. Stresses σ_s in RM2-10 along X at 1280 kN

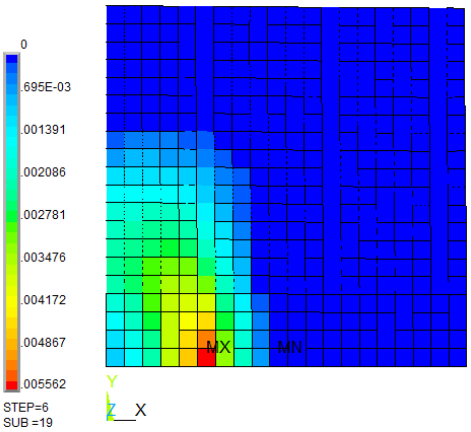


Рис. 18. Деформации $\varepsilon_{s,pl}$ в РМ2-10 по X при 1280 кН
Fig. 18. Deformations $\varepsilon_{s,pl}$ in RM2-10 along X at 1280 kN

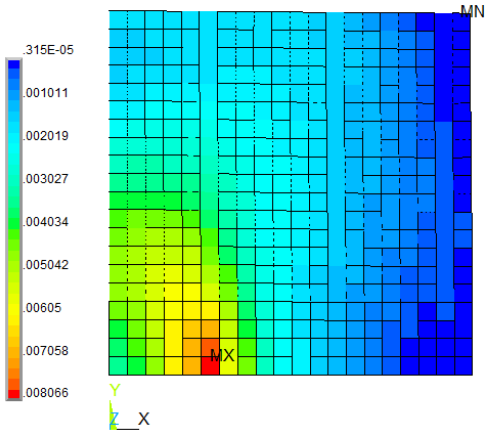


Рис. 19. Деформации $\varepsilon_{s,tl}$ в РМ2-10 по X при 1280 кН
Fig. 19. Deformations $\varepsilon_{s,tl}$ in RM2-10 along X at 1280 kN

На рис. 20…23 для РМ3-2 приведены изополя прогибов f (м) , напряжений σ_{bx} (кПа) в нижнем слое бетона по оси X, напряжений $\sigma_{s,b}$ и $\sigma_{s,t}$ (кПа) в нижнем и верхнем арматурных слоях по оси X при равномерно распределенной нагрузке 15,2 кПа (сосредоточенная для РМ2-10 – 1231 кН), полученных в конце итерационного процесса.

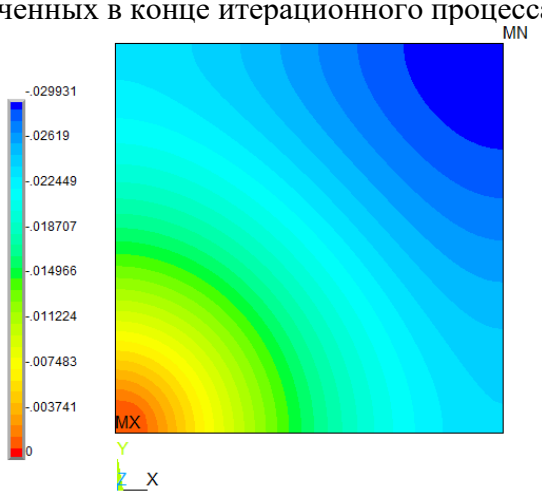


Рис. 20. Прогибы f в РМ3-2 по Z при 15,2 кПа
Fig. 20. Deflections f in RM3-2 along Z at 15.2 kPa

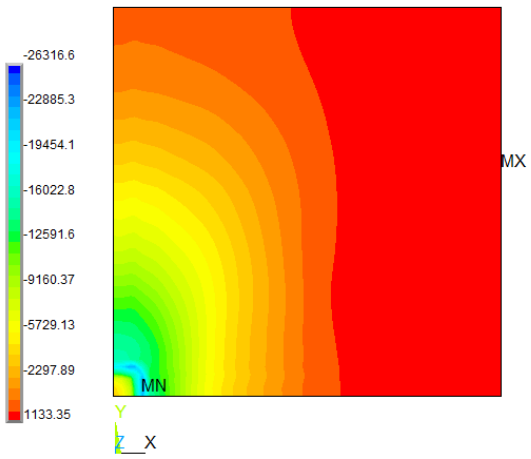


Рис. 21. Напряжения σ_{bx} в РМ3-2 по X при 15,2 кПа
Fig. 21. Stresses σ_{bx} in RM3-2 along X at 15.2 kPa

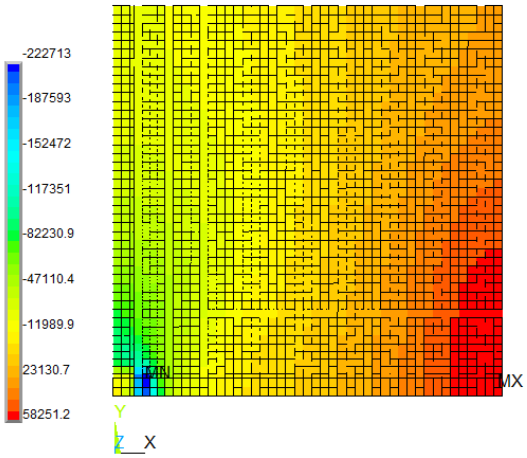


Рис. 22. Напряжения $\sigma_{s,b}$ в РМ3-2 по X при 15,2 кПа
Fig. 22. Stresses $\sigma_{s,b}$ in RM3-2 along X at 15.2 kPa

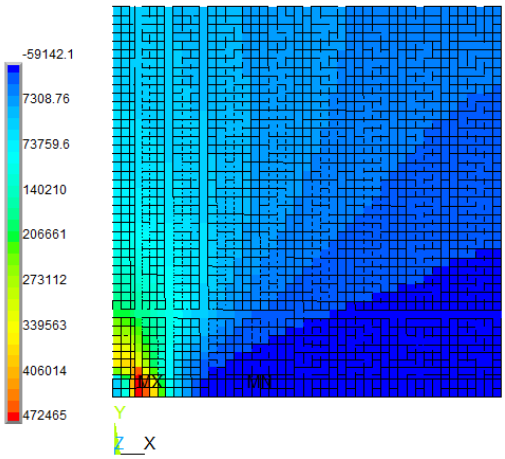


Рис. 23. Напряжения $\sigma_{s,t}$ в РМ3-2 по X при 15,2 кПа
Fig. 23. Stresses $\sigma_{s,t}$ in RM3-2 along X at 15.2 kPa

10. Кратное изменение (увеличение и уменьшение в два раза) принятого значения энергии разрушения G_{ft} (до 80 или 20 Дж/м^2) в РМ2-10 и РМ3-2 при сохранении величин других параметров УРД (HSD) не оказывает заметного влияния на кривые «*P*-*f*» как в части предельной нагрузки, так и прогибов.

Остальные параметры УРД (HSD) для РМ2 и РМ3 достаточно интуитивные – снижение механических характеристик в относительном выражении приводит к уменьшению предельной нагрузки и увеличению прогибов, и были подобраны исходя из наибольшего соответствия экспериментальной диаграмме «*P*-*f*» фрагмента плиты ФПП-2, рассмотренного в [15].

11. В РМ1 приращение нагрузки на каждом шаге составляло половину от нормативного собственного веса плиты – 2,5 кПа. В РМ2 и РМ3 приращение нагрузки было принято на основе проведенного натурного эксперимента – 200 кН и 2,5 кПа соответственно, при этом в РМ-2 собственный вес плиты и оснастки задавался до начала нагружения с помощью команды ACEL, определяющей ускорение свободного падения для задания силы тяжести (в нашем случае вдоль оси Z). При увеличении количества шагов и уменьшении величины приращения нагрузки в два раза каких-либо значительных изменений на диаграммах «*P*-*f*» для всех РМ1…РМ3 не выявлено.

12. На рис. 21-23 можно заметить важный и интересный результат расчета – граница нулевых изгибающих моментов (или нулевых нормальных сжимающих напряжений в бетоне σ_{bx} и арматуре $\sigma_{s,b}$) на рис. 21, 22 проходит на расстоянии ~1/5L (9/5=1,8 м) от оси колонны. При этом граница нулевых нормальных растягивающих напряжений в арматуре $\sigma_{s,t}$ (рис. 23) находится гораздо ближе к колонне, на расстоянии от оси ~1/9L (9/9=1,0 м). Это происходит, скорее всего, в связи с «пластическим» сдвигом в бетоне опорной зоны плиты, см. также п. 9 выше, и вряд ли соответствует реальной картине НДС.

В дополнение перечисленных выше количественных оценок результатов численного моделирования плитных ЖБК в нелинейной постановке необходимо отметить качественные:

1. С помощью реализованного в ПВК аппарата упрочнения-разупрочнения-дилатации (УРД-HSD) бетона и стали для случая продавливания можно получить удовлетворительные результаты соответствия механических моделей, основанных на различных теориях прочности бетона – DP и MW, относительно результатов физических экспериментов в части диаграмм «*P*-*f*» при различных параметрах РМ: размеры КЭ, способ армирования и т.д.

Для плит опертых по контуру получить аналогичный результат не удалось, что вызывает множество вопросов к диаграмме «*P*-*f*» и оценке предельной нагрузки, указанных в Справке:

- причина невозможности дальнейшего сопротивления конструкции росту внешней нагрузки выше значения 27,5 кПа при напряжениях в нижней растянутой рабочей арматуре класса А500 по оси X – 25,5 МПа (в РМ1-2: по оси X – 17,3 МПа, по оси Y – 49,1 МПа);
- причина столь существенной разницы в оценках предельной нагрузки по сравнению с прикладными теориями расчета, см. п. 2 «Результаты …».

Кроме того, такой подход существенно снижает влияние самих критериев прочности и пластичности бетона на конечный результат и картину НДС железобетонных плит. В этой связи, можно сделать следующий вывод – выбор теории прочности бетона не является определяющим для расчета плитных ЖБК при текущем способе моделирования трещин.

2. Рассмотренный способ учета нормальных и наклонных трещин на основе модели условных трещин (использования относительных пластических деформаций растяжения бетона $\varepsilon_{bt,pl}$ вместо фактических трещин) не позволяет получить близкое к реальности НДС изгибаемых ЖБК как в части напряжений в сжатой зоне бетоне над трещинами, так и в растянутой арматуре, особенно в пролетных зонах плит на примере РМ1 и РМ3.

Возможно, другой подход на основе модели микроплоскостей (microplane model) [21, 22], реализованный в ПВК и рассмотренный на примере узла сопряжения ригеля с колонной в разделе 54 Справки, позволяет получить более качественные результаты моделирования НДС ЖБК. Хотя изополя пластических деформаций в арматуре с максимальным значением $\varepsilon_{s,pl}$= 0,044 и повреждений бетона при растяжении и сжатии, показанные на рис. 54.8 и 54.6 Справки соответственно, позволяют в этом усомниться и вызывают не меньше вопросов, чем результаты в разделе 49.

3. Диаграммы «*P-f*» не могут служить инструментом для получения качественной оценки НДС плитных ЖБК при использовании рассмотренных способов моделирования. Тем не менее, при расчетах на продавливание являются хорошим вспомогательным инструментом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа [1, стр. 8] начинается с описания направлений, которые занимаются изучением проблем прочности, разрушения и пластической деформации различных конструкционных материалов. Инструменты и подходы, рассматриваемые в данной статье, относятся только к одному из них – механико-расчетному (техническому), который использует аппарат и концепции механики сплошной среды. Множество физико-химических особенностей бетона и железобетона не укладываются в рамки механического подхода и, скорее всего, вряд ли будут когда-нибудь учтены в полном объеме, например: структура бетона и изменение прочности во времени; начальные напряжения и усадка бетона в зависимости от способа изготовления; отсутствие, наличие и влияние профиля арматуры на сцепление с бетоном; скорость и способ приложения нагрузки; влияние поперечных деформаций арматуры на бетон, зажатый между арматурными сетками или каркасами и другие, перечисленные в монографии [3]. Главный недостаток текущей реализации на основе МКЭ в большинстве ПВК – это отсутствие возможности моделирования образования и раскрытия фактических силовых трещин, которые должны физически отсоединять друг от друга объемные 8-ми узловые КЭ по соответствующим граням и делить их при необходимости на более мелкие 6-ти, 5-ти и 4-х узловые КЭ, что позволит сформировать и показать возникающие поверхности нормальных и наклонных трещин в перестроенной расчетной модели уже на основе последующего нелинейного расчета. Подмена предложенного подхода отображением растягивающих пластических деформаций вместо трещин, как например на рис. 16 в статье [8], характерная большинству других источников и ПВК, не позволяет перейти на качественно новый уровень моделирования НДС ЖБК, который должен позволить получить скачки напряжений в сжатом бетоне над нормальными трещинами по сравнению с окружающим сжатым бетоном [23], а также дополнительные скачки в месте условного пересечения нормальной и наклонной трещин, как показано на рис. 14 г) в работе [24]. Очевидно, что такая реализация базируется на результатах первичного линейного расчета на основе теории упругости и потребует существенной корректировки и

доработки текущих возможностей МКЭ посредством создания специальных 8-ми или 20-ти узловых объемных КЭ, которые предварительно «собраны» и далее согласно определенного критерия разделяются на более мелкие плоскостями, проходящими через существующие узлы КЭ. Одним из таких критериев в дополнение к используемым для исходного объемного КЭ может служить ориентация площадок главных растягивающих напряжений. Понятно, что одной подобной итерации может быть недостаточно для того, чтобы получить фактические геометрию и раскрытие трещин, в связи с чем, процедура должна повториться еще один или более раз. Очевидно, что чем меньше размер объемного КЭ, тем больше результаты разделения будут соответствовать фактическому положению главных площадок и силовых трещин. Другим важным дополнением предложенного подхода должен стать критерий [25], регламентирующий расстояние между образующимися трещинами, поскольку далеко не каждый объемный КЭ должен разделяться на части, даже если в нем возникают соответствующие растягивающие напряжения.

Сложность этой задачи такова, что требует привлечения ключевых специалистов в области прикладной математики и программирования, специализирующихся на разработке и реализации МКЭ, которыми безусловно являются разработчики данного ПВК.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А.* Теория пластичности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1978. – 316 с.

2. *Карпенко Н.И.* Теория деформирования железобетона с трещинами. – М., Стройиздат, 1976. – 208 с.

3. *Карпенко Н.И.* Общие модели механики железобетона. – М., Стройиздат, 1996. – 413 с.

4. *Филоненко-Бородич М.М*. Механические теории прочности. – М.: Издательство МГУ, 1961. – 84 с.

5. *Агапов В.П., Маркович А.С.* Критерий прочности бетона для двух- и трехосного напряженного состояния // Интернет-журнал «Транспортные сооружения». – 2023. Т. 10. № 4. С.1-25.

6. *Агапов В.П., Маркович А.С.* Шестипараметрический критерий прочности для бетона // Строительная механика и расчет сооружений. – 2023. – № 6 (311). С.20-32.

7. *Агапов В.П., Маркович А.С.* Расчет массивных железобетонных конструкций с учетом трещинообразования // Промышленное и гражданское строительство. – 2023. – №7. С.43-49.

8. *Бударин А.М., Ремпель Г.И., Камзолкин А.А., Алехин В.Н*. Деформационно-прочностная модель бетона с двойным независимым упрочнением // Вестник МГСУ. 2023. Т. 18. Вып. 4. С.517–532.

9. *Ремпель Г.И., Бударин А.М., Долгих А.П., Камзолкин А.А., Алехин В.Н*. Обзор и сравнительный анализ критериев прочности для моделирования нелинейного поведения бетона // Вестник МГСУ. 2024. Т.19. Вып. 6. С. 857–877.

10. *Бударин А.М., Плетнев М.В., Алехин В.Н*. Численное моделирование изгибаемых железобетонных элементов с использованием критерия прочности Друкера-Прагера // Академический вестник УралНИИпроект РААСН. – 2018. – № 3 (38). С.74-77.

11. *Novozhilov, Y.V.; Dmitriev, A.N.; Mikhaluk, D.S*. Precise Calibration of the Continuous Surface Cap Model for Concrete Simulation. Buildings 2022, 12, DOI:10.3390/buildings12050636.

12. *Willam K.J., Warnke E.D*. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete, Proceedings of IABSE, Structural Engineering Report 19, Section III, 1975, pp. 1-30.

13. *Menetrey P., Willam K.J*. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization // ACI Structural Journal. 1995. Vol. 92. Issue 3. DOI: 10.14359/1132.

14. *Menetrey P*. Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures. – Lausanne, EPFL, Dissertation 1279, 1994, p.179.

15. *Пекин Д.А*. Влияние изгиба на механизм продавливания опорной зоны железобетонной плиты // Промышленное и гражданское строительство. – 2019. – №10. С.20-28.

16. *A. Hillerborg, M. Modeer, P.E. Petersson*. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite element. Cement and Concrete Research (US), 6:773-782, 1976.

17. *Клованич С.Ф. Шеховцов В.И*. Продавливание железобетонных плит. Натурный и численный эксперименты. – Одесса: ОНМУ, 2011. – 119 с.

18. *Chen W-F., Saleeb A. F*. Constitutive equations for engineering materials. Plasticity and Modeling (Vol. 2). – Amsterdam. Elsevier Publishing, 1994. – 1129 p.

19. *Пекин Д.А.* Механика железобетонных балок с нормальными трещинами при плоском изгибе // Промышленное и гражданское строительство. – 2024. – №10. С.12-23.

20. *Гвоздев А.А.* Расчет несущей способности конструкций по методу предельного равновесия – М.: Госстройиздат, 1949. – 280 с.

21. *Bazant, Z.P., Gambarova, P.G*. Crack shear in concrete: Crack band microplane model. Journal of Structural Engineering 110, 2015-2036, 1984.

22. *Bazant, Z.P., Oh, B. H*. Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. Journal for Engineering Mechanics. 111, 559-582, 1985.

23. *Пекин Д.А.* Стадии напряженно-деформированного состояния железобетонных балок с нормальными трещинами при плоском изгибе // Промышленное и гражданское строительство. – 2024. – №9. С.59-67.

24. *Залесов А.С., Климов Ю.А*. Прочность железобетонных конструкций при действии поперечных сил. – К.: Будивэльник, 1989. – 104 с.

25. *Пекин Д.А*. Деформационный критерий образования нормальных трещин в железобетонных балках при плоском изгибе // Железобетонные конструкции. 2024. Т. 8. № 4. С. 33-43.

REFERENCES

1. Geniev G.A., Kissyuk V.N., Tyupin G.A. Theory of plasticity of concrete and reinforced concrete. – M.: Stroyizdat, 1978. – 316 p. (In Russ.).

2. Karpenko N.I. Theory of deformation of reinforced concrete with cracks. – M., Stroyizdat, 1976. – 208 p. (In Russ.).

3. Karpenko N.I. General models of reinforced concrete mechanics. – M., Stroyizdat, 1996. – 413 p. (In Russ.).

4. Filonenko-Borodich, M.M. Mechanical Theories of Strength. Moscow: Moscow State University Publishing House, 1961, 84 p. (In Russ.).

5. Agapov, V.P., Markovich, A.S. Strength Criterion of Concrete for Bi- and Triaxial Stress States. Online Journal "Transport Structures". 2023, Vol. 10, No. 4, pp. 1-25. DOI: 10.15862/09SATS423 (rus.).

6. Agapov, V.P., Markovich, A.S. Six-Parameter Strength Criterion for Concrete. Structural Mechanics and Calculation of Structures. 2023, No. 6 (311), pp. 20-32. (In Russ.).

7. Agapov, V.P., Markovich, A.S. Calculation of Massive Reinforced Concrete Structures Taking into Account Cracking. Industrial and Civil Engineering. 2023, No. 7, pp. 43-49. DOI: 10.33622/0869-7019.2023.07.43-49 (rus.).

8. Budarin A.M., Rempel G.I., Kamzolkyn A.A., Alekhin V.N. Stress-strain concrete model with double independent reinforcement. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2023; 18(4):517-532. DOI: 10.22227/1997-0935.2023.4.517-532 (rus.).

9. Rempel G.I., Budarin A.M., Dolgikh A.P., Kamzolkin A.A., Alekhin V.N. Review and comparative analysis of strength criteria for modelling non-linear behaviour of concrete. *Vestnik MGSU* [Monthly Journal on Construction and Architecture]. 2024; 19(6):857-877. DOI: 10.22227/1997-0935.2024.6.857-877 (rus.).

10. Budarin A.M., Pletnev M.V., Alekhine V.N. Numerical modeling of bending reinforced concrete elements using the Drucker-Prager strength criterion // Academic Bulletin of the UralNII-proekt RAASN. - 2018. - No. 3 (38). P. 74-77. (In Russ.).

11. Novozhilov, Y.V.; Dmitriev, A.N.; Mikhaluk, D.S. Precise Calibration of the Continuous Surface Cap Model for Concrete Simulation. Buildings 2022, 12, DOI:10.3390/buildings12050636.

12. Willam K.J., Warnke E.D. Constitutive Model for the Triaxial Behavior of Concrete, Proceedings of IABSE, Structural Engineering Report 19, Section III, 1975, pp. 1-30.

13. Menetrey P., Willam K.J. Triaxial failure criterion for concrete and its generalization // ACI Structural Journal. 1995. Vol. 92. Issue 3. DOI: 10.14359/1132.

14. Menetrey P. Numerical analysis of punching failure in reinforced concrete structures. – Lausanne, EPFL, Dissertation 1279, 1994, p.179.

15. Pekin D.A. The influence of bending on the mechanism of punching of the support zone of a reinforced concrete slab // Industrial and civil engineering. – 2019. – No. 10. P. 20-28. DOI: 10.33622/0869-7019.2019.10.20-28 (rus.).

16. A. Hillerborg, M. Modeer, P.E. Petersson. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite element. Cement and Concrete Research (US), 6:773-782, 1976.

17. Klovanich S.F. Shekhovtsov V.I. Punching of reinforced concrete slabs. Natural and numerical experiments. – Odessa: ONMU, 2011. – 119 p. (In Russ.).

18. Chen W-F., Saleeb A. F. Constitutive equations for engineering materials. Plasticity and Modeling (Vol. 2). – Amsterdam. Elsevier Publishing, 1994. – 1129 p.

19. Pekin D. A. Mechanics of Reinforced Concrete Beams With Normal Cracks Under Flat Bending. Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo [Industrial and Civil Engineering], 2024, No. 10, pp. 12–23. (In Russ.). DOI: 10.33622/0869-7019.2024.10.12-23 (rus.).

20. Gvozdev A.A. Calculation of the bearing capacity of structures using the limit equilibrium method. – M.: Gosstroyizdat, 1949. – 280 p. (In Russ.).

21. Bazant, Z.P., Gambarova, P.G. Crack shear in concrete: Crack band microplane model. Journal of Structural Engineering 110, 2015-2036, 1984.

22. Bazant, Z.P., Oh, B. H. Microplane model for progressive fracture of concrete and rock. Journal for Engineering Mechanics. 111, 559-582, 1985.

23. Pekin D. A. Stages of Stress-Strain State of Reinforced Concrete Beams With Normal Cracks Under Plane Bending. Promyshlennoe i grazhdanskoe stroitel'stvo [Industrial and Civil Engineering], 2024, no. 9, pp. 59–67. (In Russ.). DOI: 10.33622/0869-7019.2024.09.59-67 (rus.).

24. Zalesov A.S., Klimov Yu.A. Strength of reinforced concrete structures under the action of transverse forces. – K.: Budivelnik, 1989. – 104 p. (In Russ.).

25. Pekin D.A. Deformation criterion for the formation of normal cracks in reinforced concrete beams under plane bending // Reinforced concrete structures. 2024. Vol. 8. No. 4. P. 33-43. DOI: 10.22227/2949-1622.2024.4.33-43 (rus.).